# 基于加权平均变换的一些算子代数中典型等式等号条件刻画

参赛队员　汪成科

指导老师　范萼华

参赛学校　中国常熟世界联合学院

省份　　江苏

国家　　中国

创新性申明：

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：汪成科　　　　　　　　　　指导老师：范萼华

# 目录

# 摘要

文[1],[2]在最近以不同的方式定义了算子的加权数值域半径,本文研究这两种定义的区别和统一,以及和经典数值域半径的联系.针对文[2]中数值域半径

$$\omega_v(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|ve^{i\theta}A+(1-v)e^{-i\theta}A^*\right\|,$$

其中$v\in[0,1]$, $A$是*Hilbert*空间$\mathcal{H}$上的任意有界线性算子.我们受[1]中加权算子范数定义的启发,基于[2],给出新的加权算子范数定义,称

$$M_v(A)=vA+(1-v)A^*$$

是算子$A$的加权平均变换,称

$$\|A\|_v\triangleq\|M_v(A)\|$$

是算子$A$的加权算子范数.我们利用加权数值域半径的凸性结合*Hadamard*不等式等发展数值域半径的估计,更多的是加权数值域半径不等式,建立了一些边界性等式如

$$\|A+B\|_v^{\ 2}=\|A\|_v^{\ 2}+\|B\|_v^{\ 2}$$

$$\omega_v\left(A^2+B^2\right)=4\alpha\max\left\{\omega_v^2(A),\omega_v^2(B)\right\}$$

的充要条件.特别地,我们通过例 3 来说明不等式

$$\omega_v(A+B)\le\omega_v(A)+\omega_v(B)$$

加强了*Carmichael*和*Mason*的关于多项式零点估计的结果.



**关键词:**加权数值域半径　加权平均变换　加权算子范数 多项式零点

# 基本符号和术语

**定义 1**[4]:　设$\mathcal{H}$是复数域$\mathbb{C}$上的向量空间.若映射

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$$

满足:

(1) 线性性:对任意固定的$y\in\mathcal{H}$,从$\mathcal{H}$到$\mathbb{C}$的映射$x\mapsto\langle x,y\rangle$是线性的.

(2) 对称性:任取$x,y\in\mathcal{H}$,有$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

(3) 非负性:任取$x\in\mathcal{H}$,$\langle x,x\rangle\geq 0$,并且$\langle x,x\rangle=0$当且仅当$x=0$,则称映射$\langle\cdot,\cdot\rangle$为$\mathcal{H}$上的**内积**,并称赋予内积的向量空间$\mathcal{H}$为**内积空间**.

**定义 2**[5]:　设$X$是复数域$\mathbb{C}$上的向量空间,如果泛函$\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}_+(\geq 0)$满足:

(1)$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

(2)三角不等式:$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

(3)齐次性:$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$,$\alpha\in\mathbb{C}$,$x\in X$

称$X$是**赋范空间**,$\|x\|$称为$x$的**范数**.赋范空间$X$中的序列$\{x_n\}$称为*Cauchy*列(**基本列**),如果对任何$\varepsilon>0$,存在自然数$N$,使得当$m,n\geq N$,成立

$$\|x_n-x_m\|\leq\varepsilon.$$

若每个*Cauchy*序列收敛,则赋范空间$X$称为**完备的**.完备的赋范空间称为*Banach*空间.

**定义 3**[4]:　设$\mathcal{H}$是内积空间,令$\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$,$x\in\mathcal{H}$,称$\|\cdot\|$为由内积导出的范数,由此$\mathcal{H}$成为赋范空间.若这个范数还是完备的,则称$\mathcal{H}$是*Hilbert* **空间**.

**例 1**[4]:　若$\mathcal{H}$是$\mathbb{C}^n$,且$\forall x=(x_i), y=(y_i)\in\mathbb{C}^n$,内积定义为$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$,则$\mathbb{C}^n$是*Hilbert*空间,更有$\mathcal{B}(\mathcal{H})=\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,即$\mathbb{C}$上的$n$阶复矩阵全体.

**定义 4**[4]:　设$\mathcal{H}$是*Hilbert*空间,$A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$是映射,若对任意的$\lambda\in\mathbb{C}$及任意的$x,y\in\mathcal{H}$,有

$$A(\lambda x+y)=\lambda Ax+Ay,$$

则称$A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$是**线性映射**(也称为**线性算子**),若存在$C\geq 0$,使得对任意的$x\in\mathcal{H}$,有

$$\|Ax\|\leq C\|x\|,$$

则称$A$是**有界的**.令

$$\|A\|=\sup_{x\in\mathcal{H},x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

称$\|A\|$是$A$的**范数**,并记$\mathcal{H}$到$\mathcal{H}$的有界线性映射(或称有界线性算子)的全体为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

**定义 5**[5]:　设$\mathcal{A}$是复数域$\mathbb{C}$上的*Banach*空间,同时是代数,其乘法满足

$$\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$$

则称$\mathcal{A}$是复数域$\mathbb{C}$上的*Banach*代数.

**定义 6**[5]:　设$\mathcal{A}$是*Banach*代数,$x\in\mathcal{A}$,若存在$y\in\mathcal{A}$,使得$xy=yx=1$,则称$x$是**可逆的**.

**定理 1**[5]:　$\mathcal{B}(\mathcal{H})$是*Banach*代数.

**定义 7**[5]: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,令集合

$$\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda-A\text{不可逆}\}$$

则称 $\sigma(A)$ 是 $A$ 的**谱**,称 $r(A)=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$ 是 $A$ 的**谱半径**.

**定理 2**[4]: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则存在唯一的 $A^*\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,使得

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle,\ \ \forall x,y\in\mathcal{H}$$

称 $A^*$ 是 $A$ 的**伴随算子**.

**定义 8**[5]: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A=A^*$,则称 $A$ 是**自伴算子**,又 $\sigma(A)\subseteq\mathbb{R}_+$,则称 $A$ 是**正算子**.

**定义 9**[6]: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,令集合

$$W(A)=\{\langle Ax,x\rangle:x\in\mathcal{H},\|x\|=1\}$$

则称 $W(A)$ 是 $A$ 的**数值域**,称 $\omega(A)=\sup\limits_{\lambda\in W(A)}|\lambda|$ 是 $A$ 的**数值域半径**.

**定理 10**[8]: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则 $A$ 可以分解成两个自伴算子的线性组合,即

$$A=\mathcal{R}(A)+i\mathcal{I}(A)$$

其中 $\mathcal{R}(A)=\dfrac{A+A^*}{2}$, $\mathcal{I}(A)=\dfrac{A-A^*}{2i}$ 分别称为 $A$ 的**实部**和**虚部**.

# 引言

由基本符号和术语部分的定理 10 指出对任意的$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,有

$$A=\mathcal{R}(A)+i\mathcal{I}(A),$$

其中$\mathcal{R}(A)=\dfrac{A+A^*}{2},\mathcal{I}(A)=\dfrac{A-A^*}{2i}$分别为$A$的实部和虚部.

特别地,$\mathcal{H}$是1维复 *Hilbert* 空间$\mathbb{C}$时,易有$\mathcal{B}(\mathcal{H})=\mathbb{C}$,那么对任意的$z=a+ib\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,有$z^*=\overline{z}=a-ib$,则

$$\mathcal{R}(z)=\frac{a+ib+a-ib}{2}=a,$$
$$\mathcal{I}(z)=\frac{a+ib-a+ib}{2i}=b$$

从这个事实看,对一般$\mathcal{B}(\mathcal{H})$上$A$的实部和虚部的定义是自然的.最近,*Sheikhhosseini* 等人在[2]中从实数的加权观点重新审视$A$的实部和虚部,具体地,对$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1]$,定义

$$\mathcal{R}_v(A)=vA+(1-v)A^*$$

$$\mathcal{I}_v(A)=\frac{vA-(1-v)A^*}{i} \tag{1}$$

并分别称为算子$A$的加权实部和加权虚部.在$v=\dfrac{1}{2}$,就有$\mathcal{R}_v(A)=\mathcal{R}(A)$,$\mathcal{I}_v(A)=\mathcal{I}(A)$.又由定理 1.8,文[2]定义**加权数值域半径**

$$\omega_v(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\mathcal{R}_v\left(e^{i\theta}A\right)\right\| \tag{2}$$

易有$\omega_{\frac{1}{2}}(A)=\omega(A)$和$\omega_0(A)=\omega_1(A)=\|A\|=\|A^*\|$.

另一方面,由定义 9,定理 10 有

$$\omega(A)=\sup_{x\in\mathcal{H},\|x\|=1}\left|\left\langle\left(\mathcal{R}(A)+i\mathcal{I}(A)\right)x,x\right\rangle\right|.$$

又定理 1.6,定理 10 有

$$\|A\|=\sup_{x,y\in\mathcal{H},\|x\|=\|y\|=1}\left|\langle Ax,y\rangle\right|=\sup_{x,y\in\mathcal{H},\|x\|=\|y\|=1}\left|\left\langle\left(\mathcal{R}(A)+i\mathcal{I}(A)\right)x,y\right\rangle\right|.$$

$Conde$ 等人受[2]的影响,结合上面两个等式,在文[1]中依赖

$$\mathcal{I}_v(A)=\frac{(1-v)A-vA^*}{i} \tag{3}$$

定义另一种形式的加权数值域半径 $\omega_v(A)$ 和加权算子范数 $\|A\|_v$ ,具体地,

$$\omega_v(A)=\sup_{x\in\mathcal{H},\|x\|=1}\left|\left\langle\left(\mathcal{R}_v(A)+i\mathcal{I}_v(A)\right)x,x\right\rangle\right|=\omega\left((1-2v)A^*+A\right)$$

$$\|A\|_v=\sup_{x,y\in\mathcal{H},\|x\|=\|y\|=1}\left|\left\langle\left(\mathcal{R}_v(A)+i\mathcal{I}_v(A)\right)x,y\right\rangle\right|=\left\|(1-2v)A^*+A\right\|$$

由此,自然的问题是:

**基于在 $Sheikhhosseini$ 等人意义下定义的加权数值域半径,此时加权算子范数自然的形式是如何的?**

我们期望定义的加权算子范数是范数,而命题 1 指出 $Conde$ 等人意义下的加权算子范数事实上也不一定是范数,故考察 $Conde$ 等人意义下的加权数值域半径和加权算子范数,其特征是形式上具有整齐性,从而我们希望在 $Sheikhhosseini$ 等人意义下定义的加权算子范数和加权数值域半径在形式上也有一定的整齐性,为此,由(2)直接展开有

$$\omega_v(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\mathcal{R}_v\left(e^{i\theta}A\right)\right\|=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|ve^{i\theta}A+(1-v)\left(e^{i\theta}A\right)^*\right\|$$

我们定义在 $Sheikhhosseini$ 等人意义下的加权算子范数,具体地,

**定义 1**: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1]$,则称

$$\|A\|_v=\left\|vA+(1-v)A^*\right\|$$

是算子 $A$ 的**加权算子范数**.显然, $\|A\|_{\frac{1}{2}}\le\|A\|_0=\|A\|_1=\|A\|=\|A^*\|$.

**定义 2**: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1]$,则称

$$M_v(A)=vA+(1-v)A^*$$

是算子 $A$ 的**加权平均变换**.特别地, $M_0(A)=A^*,M_1(A)=A$ 和 $M_{\frac{1}{2}}(A)=\mathcal{R}(A)$.

本文从加权平均变换的基本性质开始,依赖 $Cauchy$ 不等式,得到加权算子范数 $\|A\|_v$ 的基本估计,即定理 1:

$$\|A\|_v \le \frac{\left\|v|A|+(1-v)|A^*|\right\|+\left\|v|A^*|+(1-v)|A|\right\|}{2} \le \|A\|$$

自然的问题是上述不等式等号成立的充要条件,为此,我们建立更一般的等式刻画,即定理 2 刻画的等式

$$\|AB\|_v = \|A\|\|B\|$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中两个算子 $A,B$ 和的加权算子范数不等式在定理 3 中被建立,即

$$\|A+B\|_v \le \left(\left\|M_v(A^*)M_v(A)+M_v(B^*)M_v(B)\right\|+2\omega\left(M_v(B^*)M_v(A)\right)\right)^{\frac{1}{2}} \le \|A\|_v+\|B\|_v$$

上述不等式等号成立,即

$$\|A+B\|_v = \|A\|_v+\|B\|_v$$

的充要条件在定理 4 中建立,作为推论,在中间项中的量 $M_v(B^*)M_v(A)$ 是正算子时,有等号成立更简洁的充要条件

$$\left\|M_v(B^*)M_v(A)\right\| = \|B\|_v\|A\|_v$$

定理 5 则给出了关于 $\omega\left(M_v(B^*)M_v(A)\right)$ 的一边界性的等式

$$\omega\left(M_v(B^*)M_v(A)\right) = \max\left\{\|A\|_v^{\ 2},\|B\|_v^{\ 2}\right\}$$

的条件刻画,其等价关于加权算子范数的边界性等式,即

$$\|A+B\|_v = 2\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\}$$

定理 6 建立了关于加权算子范数的勾股定理,即

$$\|A+B\|_v^{\ 2} = \|A\|_v^{\ 2}+\|B\|_v^{\ 2}$$

的充要条件,受建立的加权算子范数等式的影响,对加权数值域半径我们也考虑类似的问题,即刻画

$$\omega_v(A+B) = \omega_v(A)+\omega_v(B)$$

成立的充要条件,定理 9 则给出了算子乘积的加权数值域半径的边界性等式

$$\omega_v(AB) = \max\left\{\|A\|^2,\|B\|^2\right\}$$

的充要条件.最后,我们给出关于加权数值域半径的边界性等式

$$\omega_v\left(A^2+B^2\right) = 4\alpha\max\left\{\omega_v^2(A),\omega_v^2(B)\right\}$$

的充要条件.

另一方面, 利用加权数值域半径$\omega_v(A)$和加权算子范数$\|A\|_v$的基本关系

$$\omega_v(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|e^{i\theta}A\right\|_v,$$

我们从函数$f(v)=\|A\|_v$的凸性入手, 指出由加权数值域半径诱导的凸函数的差不一定是凸函数, 见例 2. 之后, 利用 $Hadamard-Hammer-Bullen$ 不等式,给出了加权数值域半径的估计.这些结果在加强 $Sheikhhosseini$ [2]等人对加权数值域半径估计的同时,也在某种程度上加强了多项式零点的估计.具体地,给定$n$次多项式

$$p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

其中$a_0\neq0,a_1,\cdots,a_{n-1}$是复数,$p(z)$的 $Frobenius$ 友矩阵$C(p)$是

$$C(p)=\begin{pmatrix}-a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_0\\ 1 & & & 0\\ & \cdots & & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

熟知的,$C(p)$的特征多项式是$p(z)$,即$C(p)$的特征根就是$p(z)$的零点,从而有

$$\{|z|:p(z)=0\}=\{|\lambda|:|\lambda-C(p)|=0\}\le r(C(p))$$

又预备知识中的定理 2.0 有

$$\{|z|:p(z)=0\}\le r(C(p))\le\omega(C(p))$$

我们利用推论 6 的$\omega_v(A+B)$估计结果,给出了在$v=\dfrac{1}{2}$时, $\omega(C(p))=\omega_{\frac{1}{2}}(C(p))$的不等式,例 3 用这个想法给出了多项式$p(z)=z^3+z+1$的零点估计,一定程度上改进了 $Carmichael$ 和 $Mason$ [12]等人对多项式零点的估计.

# 预备知识

**定理 1.1**[4]: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则

$$\|A\|=\sup_{x\in\mathcal{H},\|x\|\le 1}\|Ax\|=\sup_{x\in\mathcal{H},\|x\|=1}\|Ax\|$$

并且对任意的$x\in\mathcal{H}$,有

$$\|Ax\|\le\|A\|\|x\|.$$

**定理 1.2**[4]: 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则复合映射$A\circ B\triangleq AB\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,且

$$\|AB\|\le\|A\|\|B\|.$$

**定义 1.1**[8]: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则称$|A|=\left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}}$是$A^*A$的**算术平方根**.

**注**: 文[8, Chapter VIII, Proposition 3.5]指出$|A|=|A|^*$.

**定理 1.3**[4]: 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则

(1) $\left(A^*\right)^*=A$

(2) $\|A\|=\|A^*\|=\|AA^*\|^{\frac{1}{2}}=\|A^*A\|^{\frac{1}{2}}=\||A|\|=\||A^*|\|$

(3) $(AB)^*=B^*A^*$.

**证明**: 仅证$\|A^*A\|^{\frac{1}{2}}=\||A|\|$,其他等式是熟知的.事实上,利用$\|A\|=\|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$,$|A|=|A|^*$就有有$\||A|\|=\||A||A|\|^{\frac{1}{2}}=\|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$.

**定理 1.4**[5]: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则$A$是正算子当且仅当对任意的$x\in\mathcal{H}$,有$\langle Ax,x\rangle\ge 0$.

**定理 1.5**[5][$Cauchy-Schwarz$不等式]: 设$\mathcal{H}$是内积空间,则对任意$x,y\in\mathcal{H}$,有

$$\left|\langle x,y\rangle\right|^2\le\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

并且上式中等号成立的充分必要条件是$x$与$y$的成比例.

**定理 1.6**: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则

$$\|A\|=\sup_{x,y\in\mathcal{H},\|x\|=\|y\|=1}\left|\langle Ax,y\rangle\right|$$

**证明**: $\forall x,y\in\mathcal{H},\|x\|=\|y\|=1$,由$Cauchy-Schwarz$不等式有

$$\left|\langle Ax,y\rangle\right|\le\|Ax\|\le\|A\|$$

另一方面,取$y=\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$,则$\left|\langle Ax,y\rangle\right|=\|Ax\|$,故

$$\|Ax\|\le\sup_{x,y\in\mathcal{H},\|x\|=\|y\|=1}\left|\langle Ax,y\rangle\right|\le\|A\|$$

上式左端关于$\|x\|=1$取上确界,由定理 1.1 就有

$$\|A\|=\sup_{x,y\in\mathcal{H},\|x\|=\|y\|=1}\left|\langle Ax,y\rangle\right|.$$

**定理 1.7**[6]: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是正规算子,即$AA^*=A^*A$,则

$$r(A)=\omega(A)=\|A\|.$$

**定理 1.8**[7]: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则$\omega(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\mathcal{R}\left(e^{i\theta}A\right)\right\|$.

**定理 1.9**[9]**[混合$Cauchy-Schwarz$不等式]**: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $x$, $y\in\mathcal{H}$,则

$$\left|\langle Ax,y\rangle\right|\le\langle |A|x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle |A^*|y,y\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

**定理 2.0**[6]: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则$r(A)\le\omega(A)\le\|A\|$.

**定理 2.1**[6]: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则 $\omega\left(A^2\right)\le\omega^2(A)$.

**定理 2.2**[2]: 若 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1]$,则 $\omega_v(A+B)\le\omega_v(A)+\omega_v(B)$.

**定义 1.2**[10]: 设 $f$ 是定义在区间上的函数,若对于 $I$ 上的任意两点 $x_1,x_2$ 和任意实数 $\lambda\in(0,1)$,总有

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\le\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right)$$

则称 $f$ 为 $I$ 上的**凸函数**.

**引理 1.1**[10]: $f$ 是 $I$ 上凸函数的充要条件是:对于 $I$ 上的任意三点 $x_1<x_2<x_3$,总有

$$\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\le\frac{f\left(x_3\right)-f\left(x_2\right)}{x_3-x_2}.$$

**定理 2.3**[11]**[$Hadamard-Hammer-Bullen$不等式]**: 设 $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是凸函数,则

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le(1-\lambda)f\left(\frac{(1-\lambda)x+(1+\lambda)y}{2}\right)+\lambda f\left(\frac{(2-\lambda)x+\lambda y}{2}\right)\\
&\le\int_0^1 f\left((1-t)x+ty\right)dt\\
&\le\frac{1}{2}\left(f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right)+(1-\lambda)f(y)+\lambda f(x)\right)\\
&\le\frac{f(x)+f(y)}{2}
\end{aligned}$$

其中 $\lambda\in[0,1]$.

**定理 2.4**[2]: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,则 $\omega_v(A)\le 2v\omega(A)$.

# 主要结果

我们从两种加权算子范数是范数的充要条件开始,并在*Sheikhhosseini*意义下给出关于加权平均变换结果.

**命题 1**: 设$v\in[0,1]$,在*Conde*意义下,函数$\|\cdot\|_v:\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathbb{R}_+$满足$\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$A\mapsto\left\|(1-2v)A^*+A\right\|,$$

则$\|\cdot\|_v$是范数当且仅当$v=\frac{1}{2}$.

**证明**: 若$v=\frac{1}{2}$,则$\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,有

$$\|A\|_v=\left\|\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)A^*+A\right\|=\|A\|$$

故$\|\cdot\|_v$显然是范数.

若$v\neq\frac{1}{2}$,我们断言函数$\|\cdot\|_v$不满足范数的齐次性,从而$\|\cdot\|_v$不是范数.事实上,考虑纯虚数单位$i$,恒等算子$I$有

$$\|iI\|_v=\|-(1-2v)i+i\|=\|2vi\|=2v$$

$$|i|\|I\|_v=\|(1-2v)+1\|=|2-2v|$$

又$v\neq\frac{1}{2}$,故$\|iI\|_v\neq|i|\|I\|_v$,即$\|\cdot\|_v$不是范数.

**命题 2**:设$v\in[0,1]$,在*Sheikhhosseini*意义下,函数$\|\cdot\|_v:\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathbb{R}_+$满足$\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$A\mapsto\left\|vA+(1-v)A^*\right\|,$$

则$\|\cdot\|_v$是范数当且仅当$v=0,1$.

**证明**: 若$v=0,1$,则$\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,有

$$\|A\|_v = \|A^*\| = \|A\|$$

故$\|\cdot\|_v$显然是范数.

若$v \neq 0,1$,我们断言函数$\|\cdot\|_v$不满足范数的齐次性,从而$\|\cdot\|_v$不是范数.事实上,考虑纯虚数单位$i$,恒等算子$I$有

$$\|iI\|_v = \|vi-(1-v)i\| = \|2vi-i\| = |2v-1|$$

$$|i|\|I\|_v = \|v+1-v\| = 1$$

又$v \neq 0,1$,故$\|iI\|_v \neq |i|\|I\|_v$,即$\|\cdot\|_v$不是范数.

现在,开始我们主要的研究对象——算子的加权平均变换,从一些简单的性质出发.

**命题 3:** 若$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,则下列条件等价:

(1) $A$是自伴算子.

(2) 对任意的$v \in (0,1)$,成立$M_v(A) = A$.

(3) 存在$v \in (0,1)$,成立$M_v(A) = A$.

(4) 存在$v \in (0,1)$,成立$M_v(A) = A^*$.

(5) 对任意的$v \in (0,1)$,成立$M_v(A) = A^*$.

**证明:** 注意到在$v \neq 1$时,有

$$M_v(A) = A \Leftrightarrow vA + (1-v)A^* = A \Leftrightarrow A = A^*.$$

在$v \neq 0$时,有

$$M_v(A) = A^* \Leftrightarrow vA + (1-v)A^* = A^* \Leftrightarrow A = A^*.$$

(1) $\Rightarrow$ (2) 因为$A = A^*$,故$\forall v \in (0,1)$,有$M_v(A) = vA + (1-v)A^* = A$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然成立.

(3) $\Rightarrow$ (4) 因为 $\exists v\in(0,1)$, 成立 $M_v(A)=A$, 由最开始的事实, 即有 $M_v(A)=A^*$.

(4) $\Rightarrow$ (5) 因为 $\exists v\in(0,1)$, 成立 $M_v(A)=A^*$, 由最开始的事实, 有 $A=A^*$,

故 $\forall v\in(0,1)$, 有

$$M_v(A)=vA+(1-v)A^*=vA^*+(1-v)A^*=A^*.$$

(5) $\Rightarrow$ (1) 由最开始的事实, 显然成立.

**注**: 简单地, 取 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, 有 $M_v(A)=\begin{cases}A & v=1\\ A^* & v=0\end{cases}$, 而 $A\neq A^*$.

**命题 4**: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $v\neq\dfrac{1}{2}$, 则 $M_v(A)=0$ 当且仅当 $A=0$:

**证明**: 在 $v=1$ 时, $M_v(A)=A$, 命题显然成立.

在 $v\neq 1$ 时, 若 $M_v(A)=0$, 则

$$vA+(1-v)A^*=0 \tag{4}$$

通过等式性质有

$$A^*=\frac{v}{v-1}A \tag{5}$$

对(4)式两端取$*$运算,由定理 1.3(1)有

$$vA^*+(1-v)A=0 \tag{6}$$

将(5)式代入(6)式有

$$\left(\frac{v^2}{v-1}+(1-v)\right)A=0$$

又 $v\neq\dfrac{1}{2}$,故 $\dfrac{v^2}{v-1}+(1-v)\neq 0$,从而由上式有 $A=0$.反过来,显然是成立的.证毕.

**注**: 在 $v=\dfrac{1}{2}$ 时,易有 $M_v(A)=0$ 当且仅当 $A=-A^*$,即 $A$ 是反自伴算子.

接下来,我们研究 $M_v(A)$ 的范数性质, 即 $A$ 的加权算子范数 $\|A\|_v=\|M_v(A)\|$ 的性质, 下面这个定理给出了 $\|A\|_v$ 的估计, 并表示 $M_v(A)$ 是压缩变换.

**定理 1**:　若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $v\in[0,1]$,则

$$\|A\|_v \le \frac{\left\|v|A|+(1-v)|A^*|\right\|+\left\|v|A^*|+(1-v)|A|\right\|}{2} \le \|A\|.$$

**证明**:　任取 $x$ , $y\in\mathcal{H}$, $\|x\|=\|y\|=1$,有

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle\left(vA+(1-v)A^*\right)x,y\right\rangle\right| &= \left|\left\langle vAx,y\right\rangle+\left\langle(1-v)A^*x,y\right\rangle\right| \\
&\le \left|\left\langle vAx,y\right\rangle\right|+\left|\left\langle(1-v)A^*x,y\right\rangle\right| \\
&\quad \text{(复数三角不等式)} \\
&= v\left|\left\langle Ax,y\right\rangle\right|+(1-v)\left|\left\langle A^*x,y\right\rangle\right| \\
&\quad \text{(内积的线性性)} \\
&\le v\left|\left\langle |A|x,x\right\rangle\right|^{\frac{1}{2}}\left|\left\langle |A^*|y,y\right\rangle\right|^{\frac{1}{2}}+(1-v)\left|\left\langle |A^*|x,x\right\rangle\right|^{\frac{1}{2}}\left|\left\langle |A|y,y\right\rangle\right|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \text{(定理1.9[混合}\mathit{Cauchy}-\mathit{Schwarz}\text{不等式])} \\
&\le v\frac{\left|\left\langle |A|x,x\right\rangle\right|+\left|\left\langle |A^*|y,y\right\rangle\right|}{2}+(1-v)\frac{\left|\left\langle |A^*|x,x\right\rangle\right|+\left|\left\langle |A|y,y\right\rangle\right|}{2} \\
&\quad \text{(均值不等式)} \\
&= \frac{\left\langle\left(v|A|+(1-v)|A^*|\right)x,x\right\rangle+\left\langle\left(v|A^*|+(1-v)|A|\right)y,y\right\rangle}{2} \\
&\le \frac{\left\|v|A|+(1-v)|A^*|\right\|+\left\|v|A^*|+(1-v)|A|\right\|}{2} \\
&\quad \left(\mathit{Cauchy}-\mathit{Schwarz}\text{不等式}\right) \\
&\le \frac{\left\||A|\right\|+\left\||A^*|\right\|}{2} \\
&\quad \text{(范数的三角不等式)} \\
&\le \left\||A|\right\|=\|A\| \\
&\quad \text{(定理1.3)}
\end{aligned}$$

对上式两边关于 $\|x\|=\|y\|=1$ 取上确界, 由定理 1.6 有

$$\left\|vA+(1-v)A^*\right\| \le \frac{\left\|v|A|+(1-v)|A^*|\right\|+\left\|v|A^*|+(1-v)|A|\right\|}{2} \le \|A\|,$$

即

$$\|A\|_v \le \frac{\left\|v|A|+(1-v)|A^*|\right\|+\left\|v|A^*|+(1-v)|A|\right\|}{2} \le \|A\|.$$

为了给出上面这个式子等号的成立条件,即推论,我们有下面的一些事实.

**引理 1**: 设$\{z_n=\mathcal{R}z_n+i\mathcal{I}z_n\}$是复数序列,$a$是实数,若$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{R}z_n=a$,其中$\mathcal{R}z_n$和$\mathcal{I}z_n$分别是复数$z_n$的实部和虚部.

**证明**: 若$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,$\forall n\ge N$,有

$$|z_n-a|=\left(|\mathcal{R}z_n-a|^2+|\mathcal{I}z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

从而

$$|\mathcal{R}z_n-a|<\varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}z_n=a.$$

**定理 2**: 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,$v\in[0,1]$,则下列命题等价:

(i) $\|AB\|_v=\|A\|\|B\|$

(ii) 存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle (AB)^2x_n,x_n\right\rangle=\|A\|^2\|B\|^2.$$

**证明**: (i)$\Rightarrow$(ii) 由加权算子范数的定义和定理 1.1 有

$$\begin{aligned}\|AB\|_v&=\left\|vAB+(1-v)B^*A^*\right\|\\&=\sup_{\|x\|=1}\left\|\left(vAB+(1-v)B^*A^*\right)x\right\|\\&=\|A\|\|B\|\end{aligned}$$

故由上确界的定义知存在一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\|vABx_n+(1-v)B^*A^*x_n\right\|=\|A\|\|B\| \tag{7}$$

另一方面,由范数的三角不等式,定义 4 和定理 1.3 有

$$
\begin{aligned}
\left\|vABx_n+(1-v)B^*A^*x_n\right\| &\le v\left\|ABx_n\right\|+(1-v)\left\|B^*A^*x_n\right\| \\
&\le v\left\|ABx_n\right\|+(1-v)\left\|B^*A^*\right\| \\
&\le v\|A\|\|B\|+(1-v)\left\|B^*A^*\right\| \\
&\le v\|A\|\|B\|+(1-v)\|A\|\|B\| \\
&=\|A\|\|B\|
\end{aligned}
$$

令上式两边 $n\to\infty$,由(7)有

$$
\lim_{n\to\infty}\left(v\left\|ABx_n\right\|+(1-v)\left\|B^*A^*\right\|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(v\|A\|\|B\|+(1-v)\left\|B^*A^*\right\|\right)=\|A\|\|B\|
$$

有

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|ABx_n\right\|=\|A\|\|B\| \tag{8}
$$

类似地,可以有

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|B^*A^*x_n\right\|=\|A\|\|B\| \tag{9}
$$

进一步,考虑 *Hilbert* 空间上范数和内积的关系,展开整理有

$$
\begin{aligned}
&\left\|vABx_n+(1-v)B^*A^*x_n\right\|^2 \\
&=\left\langle vABx_n+(1-v)B^*A^*x_n, vABx_n+(1-v)B^*A^*x_n\right\rangle \\
&=v^2\left\|ABx_n\right\|^2+\left\langle vABx_n,(1-v)B^*A^*x_n\right\rangle+\left\langle(1-v)B^*A^*x_n, vABx_n\right\rangle+(1-v)^2\left\|B^*A^*x_n\right\|^2 \\
&=v^2\left\|ABx_n\right\|^2+(1-v)^2\left\|B^*A^*x_n\right\|^2+2v(1-v)\mathcal{R}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n\right\rangle
\end{aligned} \tag{10}
$$

利用等式(7),(8)和(9),令上式两边 $n\to\infty$,有

$$
\begin{aligned}
&\|A\|^2\|B\|^2=\left(v^2+(1-v)^2\right)\|A\|^2\|B\|^2+2v(1-v)\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n\right\rangle \\
&\Leftrightarrow 2v(1-v)\|A\|^2\|B\|^2=2v(1-v)\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n\right\rangle \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n\right\rangle=\|A\|^2\|B\|^2
\end{aligned} \tag{11}
$$

又复数模长等式 $|z|^2=|\mathcal{R}z|^2+|\mathcal{I}z|^2$,定义 4 和定理 1.3,结合 *Cauchy* 不等式有

$$
\left(\mathcal{R}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n\right\rangle\right)^2+\left(\mathcal{I}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n\right\rangle\right)^2=\left|\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n\right\rangle\right|^2\le\left\|ABx_n\right\|^2\left\|B^*A^*x_n\right\|^2\le\|A\|^4\|B\|^4
$$

令上式两边 $n\to\infty$,由(11)有

$$
\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n\right\rangle=0
$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle (AB)^2 x_n, x_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n \right\rangle + \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n \right\rangle = \|A\|^2\|B\|^2$$

(ii)$\Rightarrow$(i) 若存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立$\lim_{n\to\infty}\left\langle (AB)^2 x_n, x_n \right\rangle = \|A\|^2\|B\|^2$,由引理 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle (AB)^2 x_n, x_n \right\rangle = \|A\|^2\|B\|^2 \tag{12}$$

因为

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{R}\left\langle (AB)^2 x_n, x_n \right\rangle\right| &\le \left(\left|\mathcal{R}\left\langle (AB)^2 x_n, x_n \right\rangle\right|^2 + \left|\mathcal{I}\left\langle (AB)^2 x_n, x_n \right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left|\left\langle (AB)^2 x_n, x_n \right\rangle\right| = \left|\left\langle ABx_n, B^*A^*x_n \right\rangle\right| \\
&\le \|ABx_n\|\|B^*A^*x_n\| \le \|A\|\|B\|\|B^*A^*x_n\| \le \|A\|^2\|B\|^2
\end{aligned}$$

令上式两边$n\to\infty$,由(12)有$\lim_{n\to\infty}\|ABx_n\| = \|A\|\|B\|$.类似地,有$\lim_{n\to\infty}\|B^*A^*x_n\| = \|A\|\|B\|$.因此,和(10)的展开式一样,有

$$\begin{aligned}
\|A\|^2\|B\|^2 &= v^2\lim_{n\to\infty}\|ABx_n\|^2 + (1-v)^2\lim_{n\to\infty}\|B^*A^*x_n\|^2 + 2v(1-v)\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle (AB)^2 x_n, x_n \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|vABx_n + (1-v)B^*A^*x_n\right\|^2 \le \left\|vAB + (1-v)B^*A^*\right\|^2 \\
&= \|AB\|_v{}^2 \le \left(v\|AB\| + (1-v)\|B^*A^*\|\right)^2 = \|AB\|^2 \le \|A\|^2\|B\|^2
\end{aligned}$$

从而$\|AB\|_v = \|A\|\|B\|$.证毕.

**推论 1**: 若$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $v\in[0,1]$,则下列命题等价:

(i) $\|A\|_v = \|A\|$

(ii) 存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle A^2 x_n, x_n \right\rangle = \|A\|^2.$$

**证明**: 令定理 2 中的$B=I$即证.

接着,我们给出加权算子范数和标准量($\left\|M_v(A^*)M_v(A) + M_v(B^*)M_v(B)\right\|$), $2\omega\left(M_v(B^*)M_v(A)\right)$的关系,后续围绕这些量考虑一些算子等号成立的条件.

**定理 3:** 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1]$,则

$$\|A+B\|_v\le\left(\left\|M_v\left(A^*\right)M_v\left(A\right)+M_v\left(B^*\right)M_v\left(B\right)\right\|+2\omega\left(M_v\left(B^*\right)M_v\left(A\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}\le\|A\|_v+\|B\|_v$$

**证明:** 任取$x\in\mathcal{H},\|x\|=1$,有范数和内积的关系,有

$$\begin{aligned}
&\left\|v\left(A+B\right)x+\left(1-v\right)\left(A+B\right)^* x\right\|^2\\
&=\left\langle v\left(A+B\right)x,v\left(A+B\right)x\right\rangle+\left\langle\left(1-v\right)\left(A+B\right)^* x,\left(1-v\right)\left(A+B\right)^* x\right\rangle\\
&+2\mathcal{R}\left\langle v\left(A+B\right)x,\left(1-v\right)\left(A+B\right)^* x\right\rangle\\
&=v^2\left(\left\langle Ax,Ax\right\rangle+2\mathcal{R}\left\langle Ax,Bx\right\rangle+\left\langle Bx,Bx\right\rangle\right)+\left(1-v\right)^2\left(\left\langle A^*x,A^*x\right\rangle+2\mathcal{R}\left\langle A^*x,B^*x\right\rangle+\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\right)\\
&+2\mathcal{R}\left\langle v\left(A+B\right)x,\left(1-v\right)\left(A+B\right)^* x\right\rangle\\
&=v^2\left\langle Ax,Ax\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,A^*x\right\rangle+v^2\left\langle Bx,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\\
&+2\mathcal{R}\left(v^2\left\langle Ax,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,B^*x\right\rangle\right)\\
&+2\mathcal{R}\left\langle v\left(T+S\right)x,\left(1-v\right)\left(T+S\right)^* x\right\rangle\\
&=v^2\left\langle Ax,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,A^*x\right\rangle+v^2\left\langle Bx,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\\
&+2\mathcal{R}\left(v^2\left\langle Ax,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,B^*x\right\rangle\right)\\
&+v\left(1-v\right)2\mathcal{R}\left(\left\langle Ax,A^*x\right\rangle+\left\langle Bx,B^*x\right\rangle+\left\langle Ax,B^*x\right\rangle+\left\langle Bx,A^*x\right\rangle\right)\\
&=v^2\left\langle Ax,Ax\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle+v^2\left\langle Bx,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\\
&+v\left(1-v\right)2\mathcal{R}\left(\left\langle A^*x,Ax\right\rangle+\left\langle B^*x,Bx\right\rangle\right)\\
&+2\mathcal{R}\left(v^2\left\langle Ax,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,B^*x\right\rangle\right)+v\left(1-v\right)2\mathcal{R}\left(\left\langle Ax,B^*x\right\rangle+\left\langle Bx,A^*x\right\rangle\right)\\
&=v^2\left\langle Ax,Ax\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,A^*x\right\rangle+v^2\left\langle Bx,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\\
&+v\left(1-v\right)2\mathcal{R}\left(\left\langle A^*x,Ax\right\rangle+\left\langle B^*x,Bx\right\rangle\right)\\
&+2\mathcal{R}\left(v^2\left\langle B^*Ax,x\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle BA^*x,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\left\langle BAx,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\left\langle ABx,x\right\rangle\right)\\
&=v^2\left\langle Ax,Ax\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,A^*x\right\rangle+v^2\left\langle Bx,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\\
&+v\left(1-v\right)2\mathcal{R}\left(\left\langle A^*x,Ax\right\rangle+\left\langle B^*x,Bx\right\rangle\right)\\
&+2\mathcal{R}\left(v^2\left\langle B^*Ax,x\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle BA^*x,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\left\langle BAx,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\overline{\left\langle ABx,x\right\rangle}\right)\\
&=v^2\left\langle Ax,Ax\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,A^*x\right\rangle+v^2\left\langle Bx,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\\
&+v\left(1-v\right)2\mathcal{R}\left(\left\langle A^*x,Ax\right\rangle+\left\langle B^*x,Bx\right\rangle\right)\\
&+2\mathcal{R}\left(v^2\left\langle B^*Ax,x\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle BA^*x,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\left\langle BAx,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\left\langle x,B^*A^*x\right\rangle\right)\\
&=v^2\left\langle Ax,Ax\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,A^*x\right\rangle+v^2\left\langle Bx,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\\
&+v\left(1-v\right)2\mathcal{R}\left(\left\langle A^*x,Ax\right\rangle+\left\langle B^*x,Bx\right\rangle\right)\\
&+2\mathcal{R}\left(v^2\left\langle B^*Ax,x\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle BA^*x,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\left\langle BAx,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\overline{\left\langle x,B^*A^*x\right\rangle}\right)\\
&=v^2\left\langle Ax,Ax\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle A^*x,A^*x\right\rangle+v^2\left\langle Bx,Bx\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle B^*x,B^*x\right\rangle\\
&+v\left(1-v\right)2\mathcal{R}\left(\left\langle A^*x,Ax\right\rangle+\left\langle B^*x,Bx\right\rangle\right)\\
&+2\mathcal{R}\left(v^2\left\langle B^*Ax,x\right\rangle+\left(1-v\right)^2\left\langle BA^*x,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\left\langle BAx,x\right\rangle+v\left(1-v\right)\left\langle B^*A^*x,x\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le v^2\langle Ax,Ax\rangle+(1-v)^2\langle A^*x,A^*x\rangle+v^2\langle Bx,Bx\rangle+(1-v)^2\langle B^*x,B^*x\rangle\\
&+v(1-v)2\mathcal{R}\left(\langle A^*x,Ax\rangle+\langle B^*x,Bx\rangle\right)\\
&+2\left|v^2\langle B^*Ax,x\rangle+(1-v)^2\langle BA^*x,x\rangle+v(1-v)\langle BAx,x\rangle+v(1-v)\langle B^*A^*x,x\rangle\right|\\
&\le v^2\langle Ax,Ax\rangle+(1-v)^2\langle A^*x,A^*x\rangle+v^2\langle Bx,Bx\rangle+(1-v)^2\langle B^*x,B^*x\rangle\\
&+v(1-v)2\mathcal{R}\left(\langle A^*x,Ax\rangle+\langle B^*x,Bx\rangle\right)\\
&+2\omega\left(\left(vB^*+(1-v)B\right)\left(vA+(1-v)A^*\right)\right)\\
&=v^2\langle Ax,Ax\rangle+(1-v)^2\langle A^*x,A^*x\rangle+v^2\langle Bx,Bx\rangle+(1-v)^2\langle B^*x,B^*x\rangle\\
&+v(1-v)\langle A^*x,Ax\rangle+v(1-v)\langle Ax,A^*x\rangle+v(1-v)\langle B^*x,Bx\rangle+v(1-v)\langle Bx,B^*x\rangle\\
&+2\omega\left(\left(vB^*+(1-v)B\right)\left(vA+(1-v)A^*\right)\right)\\
&\le\left\|\left(vA^*+(1-v)A\right)\left(vA+(1-v)A^*\right)+\left(vB^*+(1-v)B\right)\left(vB+(1-v)B^*\right)\right\|\\
&+2\omega\left(\left(vB^*+(1-v)B\right)\left(vA+(1-v)A^*\right)\right)\\
&\le\left\|\left(vA^*+(1-v)A\right)\left(vA+(1-v)A^*\right)\right\|+\left\|\left(vB^*+(1-v)B\right)\left(vB+(1-v)B^*\right)\right\|\\
&+2\omega\left(\left(vB^*+(1-v)B\right)\left(vA+(1-v)A^*\right)\right)\\
&=\left\|vA+(1-v)A^*\right\|^2+\left\|vB+(1-v)B^*\right\|^2+2\omega\left(\left(vB^*+(1-v)B\right)\left(vA+(1-v)A^*\right)\right)\\
&\le\left\|vA+(1-v)A^*\right\|^2+\left\|vB+(1-v)B^*\right\|^2+2\left\|\left(vB^*+(1-v)B\right)\left(vA+(1-v)A^*\right)\right\|\\
&\le\left\|vA+(1-v)A^*\right\|^2+\left\|vB+(1-v)B^*\right\|^2+2\left\|vB^*+(1-v)B\right\|\left\|vA^*+(1-v)A\right\|\\
&=\left\|vA+(1-v)A^*\right\|^2+\left\|vB+(1-v)B^*\right\|^2+2\left\|vB+(1-v)B^*\right\|\left\|vA+(1-v)A^*\right\|\\
&=\left(\left\|vA+(1-v)A^*\right\|+\left\|vB+(1-v)B^*\right\|\right)^2
\end{aligned}
$$

对上式$n\to\infty$,则

$$\|A+B\|_v^2\le\left\|M_v\left(A^*\right)M_v\left(A\right)+M_v\left(B^*\right)M_v\left(B\right)\right\|+2\omega\left(M_v\left(B^*\right)M_v\left(A\right)\right)\le\left(\|A\|_v+\|B\|_v\right)^2.$$

接下来,我们给出定理 3 等号成立的条件,为此,有下面的引理.

**引理 2:** 设$\{z_n=\mathcal{R}z_n+i\mathcal{I}z_n\}$是复数序列,$a$是非负实数,若$\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{R}z_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,其中$\mathcal{R}z_n$和$\mathcal{I}z_n$分别是复数$z_n$的实部和虚部.

**证明:** $a=0$的情况是显然的,故证明$a\neq0$的情况.因为$\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{R}z_n=a$,则$\forall\varepsilon\in(0,a)$,$\exists N_1$,$\forall n\ge N_1$,有

$$|\mathcal{R}z_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\mathcal{R}z_n<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=a$,则 $\exists N_2\geq N_1,\forall n\geq N_2$,有

$$\left||z_n|-a\right|=\left|\left(|\mathcal{R}z_n|^2+|\mathcal{I}z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}-a\right|<\varepsilon$$

故

$$(a-\varepsilon)^2-\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2<(a-\varepsilon)^2-|\mathcal{R}z_n|^2<|\mathcal{I}z_n|^2<(a+\varepsilon)^2-|\mathcal{R}z_n|^2<(a+\varepsilon)^2-\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

从而

$$-3a\varepsilon+\frac{3}{4}\varepsilon^2<|\mathcal{I}z_n|^2<\frac{3}{4}\varepsilon^2+3a\varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}z_n=0 \tag{13}$$

又 $\forall n\in\mathbb{N}$,有

$$|z_n-a|=|(\mathcal{R}z_n-a)+i\mathcal{I}z_n|<|\mathcal{R}z_n-a|+|\mathcal{I}z_n|$$

上式结合(13)和 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{R}z_n=a$,易有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

**定理 4**: 若 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1]$,则下列命题等价:

(i) $\|A+B\|_v=\|A\|_v+\|B\|_v$

(ii) 存在 $\mathcal{H}$ 中的一列单位向量 $\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\langle M_v(A)x_n,M_v(B)x_n\rangle=\|A\|_v\|B\|_v.$$

**证明**: (i) $\Rightarrow$ (ii) 由加权算子范数的定义和定理 1.1 有

$$\begin{aligned}\|A+B\|_v&=\left\|v(A+B)+(1-v)(A+B)^*\right\|\\&=\sup_{\|x\|=1}\left\|\left(v(A+B)+(1-v)(A+B)^*\right)x\right\|\\&=\|A\|_v+\|B\|_v\end{aligned}$$

故由上确界的定义知存在一列单位向量 $\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\left(v(A+B)+(1-v)(A+B)^*\right)x_n\right\|=\|A\|_v+\|B\|_v \tag{14}$$

另一方面,由范数的三角不等式和定义 4 有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(v(A+B)+(1-v)(A+B)^{*}\right)x_n\right\| \\
&=\left\|\left(vA+(1-v)A^{*}+vB+(1-v)B^{*}\right)x_n\right\| \\
&\le\left\|\left(vA+(1-v)A^{*}\right)x_n\right\|+\left\|\left(vB+(1-v)B^{*}\right)x_n\right\| \\
&\le\left\|vA+(1-v)A^{*}x_n\right\|+\left\|vB+(1-v)B^{*}\right\| \\
&\le\left\|vA+(1-v)A^{*}\right\|+\left\|vB+(1-v)B^{*}\right\| \\
&=\|A\|_v+\|B\|_v
\end{aligned}
$$

令上式两边 $n\to\infty$,由(14)有

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\left\|M_v(A)x_n\right\|+\|B\|_v\right)=\|A\|_v+\|B\|_v
$$

故

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|M_v(A)x_n\right\|=\|A\|_v \tag{15}
$$

类似地,可以有

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|M_v(B)x_n\right\|=\|B\|_v \tag{16}
$$

进一步,考虑 *Hilbert* 空间上范数和内积的关系,展开整理有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(v(A+B)+(1-v)(A+B)^{*}\right)x_n\right\|^2 \\
&=\left\|\left(vA+(1-v)A^{*}\right)x_n+\left(vB+(1-v)B^{*}\right)x_n\right\|^2 \\
&=\left\|M_v(A)x_n+M_v(B)x_n\right\|^2 \\
&=\left\|M_v(A)x_n\right\|^2+\left\|M_v(B)x_n\right\|^2+2\mathcal{R}\left\langle M_v(A)x_n,M_v(B)x_n\right\rangle \\
&\le\left\|M_v(A)x_n\right\|^2+\left\|M_v(B)x_n\right\|^2+2\left|\left\langle M_v(A)x_n,M_v(B)x_n\right\rangle\right| \\
&\le\|A\|_v^{\,2}+\|B\|_v^{\,2}+2\|A\|_v\|B\|_v
\end{aligned}
$$

最后一个不等式成立是由定义 4 和 *Cauchy* 不等式.利用等式(14),(15)和(16),令上式两边 $n\to\infty$,有

$$
\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle M_v(A)x_n,M_v(B)x_n\right\rangle=\|A\|_v\|B\|_v
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\left|\left\langle M_v(A)x_n,M_v(B)x_n\right\rangle\right|=\|A\|_v\|B\|_v
$$

上面两个式子,结合引理 2,有

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(A\right)x_n, M_v\left(B\right)x_n\right\rangle = \|A\|_v \|B\|_v$$

(ii)$\Rightarrow$(i) 若存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(A\right)x_n, M_v\left(B\right)x_n\right\rangle = \|A\|_v \|B\|_v,$$

由引理 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle M_v\left(A\right)x_n, M_v\left(B\right)x_n\right\rangle = \|A\|_v \|B\|_v \tag{17}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\|A\|_v^{\ 2} + 2\left|\left\langle M_v\left(A\right)x_n, M_v\left(B\right)x_n\right\rangle\right| + \|B\|_v^{\ 2} \\
&= \|A\|_v^{\ 2} + 2\left|\left\langle \left(M_v\left(B\right)\right)^* M_v\left(A\right)x_n, x_n\right\rangle\right| + \|B\|_v^{\ 2} \\
&\le \|A\|_v^{\ 2} + 2\left\|\left(M_v\left(B\right)\right)^* M_v\left(A\right)x_n\right\| + \|B\|_v^{\ 2} \\
&\le \|A\|_v^{\ 2} + 2\left\|\left(M_v\left(B\right)\right)^*\right\|\left\|M_v\left(A\right)x_n\right\| + \|B\|_v^{\ 2} \\
&\le \|A\|_v^{\ 2} + 2\|B\|_v\|A\|_v + \|B\|_v^{\ 2} \\
&= \left(\|A\|_v + \|B\|_v\right)^2
\end{aligned}$$

令上式两边$n\to\infty$,由(17)有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|M_v\left(A\right)x_n\right\| = \|A\|_v \tag{18}$$

类似地,有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|M_v\left(B\right)x_n\right\| = \|B\|_v \tag{19}$$

因此,由(17),(18)和(19)有

$$\begin{aligned}
\left(\|A\|_v + \|B\|_v\right)^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\left\|M_v\left(A\right)x_n\right\|^2 + \left\|M_v\left(B\right)x_n\right\|^2 + 2\mathcal{R}\left\langle M_v\left(A\right)x_n, M_v\left(B\right)x_n\right\rangle\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\left(vA + \left(1-v\right)A^*\right)x_n + \left(vB + \left(1-v\right)B^*\right)x_n\right\|^2 \\
&\le \left\|vA + \left(1-v\right)A^* + vB + \left(1-v\right)B^*\right\|^2 \\
&= \|A+B\|_v^{\ 2} \\
&\le \left(\left\|vA + \left(1-v\right)A^*\right\| + \left\|vB + \left(1-v\right)B^*\right\|\right)^2 \\
&= \left(\|A\|_v + \|B\|_v\right)^2
\end{aligned}$$

从而$\|A+B\|_v = \|A\|_v + \|B\|_v$.证毕.

在给出下一个结果前,我们强调$\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1]$,成立

$$\left(M_v(A)\right)^*=M_v\left(A^*\right)$$

事实上,$\left(M_v(A)\right)^*=\left(vA+(1-v)A^*\right)^*=vA^*+(1-v)A=M_v\left(A^*\right)$.

**推论 2**: 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$,则下列命题等价:

(i) $\|A+B\|=\|A\|+\|B\|$

(ii) 存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\langle Ax_n,Bx_n\rangle=\|A\|\|B\|.$$

**证明**: 取$v=1$,使用定理 4 即证.

**推论 3**: 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1],M_v\left(B^*\right)M_v(A)$是正算子,则下列条件等价:

(i) $\|A+B\|_v=\|A\|_v+\|B\|_v$

(ii) $\left\|M_v\left(B^*\right)M_v(A)\right\|=\|B\|_v\|A\|_v$.

**证明**: (i)$\Rightarrow$(ii) 由定理 4 证明中的(18)有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)x_n\right\|=\|A\|_v\|B\|_v \tag{20}$$

又

$$\left\|\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)x_n\right\|\le\left\|\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)\right\|\le\|B\|_v\|A\|_v$$

令上式两边$n\to\infty$,由(20)即有

$$\left\|\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)\right\|=\|B\|_v\|A\|_v.$$

(ii)$\Rightarrow$(i) 因为$\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)$是正算子,故也是正规算子,从而由定理 1.7 有

$$\omega\left(\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)\right)=\left\|\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)\right\|$$

又$\left\|\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)\right\|=\|B\|_v\|A\|_v$,故

$$\omega\left(\left(M_v(B)\right)^*M_v(A)\right)=\|B\|_v\|A\|_v$$

则由定义 9 知存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle \left(M_v\left(B\right)\right)^* M_v\left(A\right)x_n, x_n\right\rangle = \|A\|_v\|B\|_v,$$

即$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(A\right)x_n, M_v\left(B\right)x_n\right\rangle = \|A\|_v\|B\|_v$,由定理 1 就有$\|A+B\|_v=\|A\|_v+\|B\|_v$.

**定理 5**: 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}), v\in[0,1], M_v\left(B^*\right)M_v\left(A\right)$是正算子,则下列条件等价:

(i) $\|A+B\|_v = 2\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\}$

(ii) $\omega\left(M_v\left(B^*\right)M_v\left(A\right)\right)=\max\left\{\|A\|_v^2,\|B\|_v^2\right\}$.

**证明**: (i)$\Rightarrow$(ii) 因为

$$\begin{aligned}2\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\} = \|A+B\|_v &= \left\|v\left(A+B\right)+\left(1-v\right)\left(A+B\right)^*\right\| \\ &= \left\|\left(vA+\left(1-v\right)A^*\right)+\left(vB+\left(1-v\right)B^*\right)\right\| \\ &\le \left\|vA+\left(1-v\right)A^*\right\|+\left\|vB+\left(1-v\right)B^*\right\| \\ &= \|A\|_v+\|B\|_v \\ &\le 2\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\}\end{aligned}$$

所以$\|A\|_v=\|B\|_v=\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\}$和$\|A+B\|_v=\|A\|_v+\|B\|_v$,由定理 4 知存在

$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(A\right)x_n, M_v\left(B\right)x_n\right\rangle = \|A\|_v\|B\|_v,$$

从而结合定义 9 有

$$\max\left\{\|A\|_v^2,\|B\|_v^2\right\}=\|A\|_v\|B\|_v\le\omega\left(\left(M_v\left(B\right)\right)^*M_v\left(A\right)\right)$$

又定理 1.2,定理 1.3 和定理 2.0 有

$$\omega\left(\left(M_v\left(B\right)\right)^*M_v\left(A\right)\right)\le\left\|\left(M_v\left(B\right)\right)^*M_v\left(A\right)\right\|\le\left\|\left(M_v\left(B\right)\right)^*\right\|\left\|M_v\left(A\right)\right\|=\|B\|_v\|A\|_v$$

最后由均值不等式有

$$\|B\|_v\|A\|_v\le\frac{\|A\|_v^2+\|B\|_v^2}{2}\le\max\left\{\|A\|_v^2,\|B\|_v^2\right\}$$

故$\omega\left(\left(M_v\left(B\right)\right)^*M_v\left(A\right)\right)=\max\left\{\|A\|_v^2,\|B\|_v^2\right\}$.

(ii)$\Rightarrow$(i) 由定理 2.0 有

$$
\begin{aligned}
\max\left\{\|A\|_v^2,\|B\|_v^2\right\} &= \omega\left(\left(M_v(B)\right)^* M_v(A)\right) \\
&\le \left\|\left(M_v(B)\right)^* M_v(A)\right\| \\
&\le \left\|\left(M_v(B)\right)^*\right\|\left\|M_v(A)\right\| \\
&= \|B\|_v\|A\|_v \le \max\left\{\|A\|_v^2,\|B\|_v^2\right\}
\end{aligned}
$$

从而

$$
\|A\|_v=\|B\|_v=\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\},
$$

并且$\omega\left(\left(M_v(B)\right)^* M_v(A)\right)=\|B\|_v\|A\|_v$,由定义 9 知存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left\langle\left(M_v(B)\right)^* M_v(A)x_n,x_n\right\rangle=\|A\|_v\|B\|_v \\
\Leftrightarrow &\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v(A)x_n,M_v(B)x_n\right\rangle=\|A\|_v\|B\|_v
\end{aligned},
$$

利用定理 4 有$\|A+B\|_v=\|A\|_v+\|B\|_v$,故$\|A+B\|_v=2\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\}$.

下面的例子表明定理 5 的条件“$M_v(B^*)M_v(A)$是正算子”是不可以去掉的.

**例 1**: 令定理 5 中的$v=1,B=-1,A=1$,则$M_v(B^*)=-1$,$M_v(A)=1$,从而

$$
\omega\left(M_v(B^*)M_v(A)\right)=\max\left\{\|A\|_v^2,\|B\|_v^2\right\}=1,
$$

而$\|A+B\|_v=0\ne 2=2\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\}$.

**定理 6**: 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1],M_v(B^*)M_v(A)=0$,则下列条件等价:

(i) $\|A+B\|_v^2=\|A\|_v^2+\|B\|_v^2$

(ii) 存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$
\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v(A^*)M_v(A)x_n,M_v(B^*)M_v(B)x_n\right\rangle=\|A\|_v^2\|B\|_v^2.
$$

证明: (i)$\Rightarrow$(ii) 因为$\left(M_v(B)\right)^* M_v(A)=0$,所以$\left(M_v(A)\right)^* M_v(B)=0$.进一步,由定理 1.3 有

$$
\begin{aligned}
\|A+B\|_v^{\ 2} &= \left\|v(A+B)+(1-v)(A+B)^*\right\|^2 \\
&= \left\|\left(v(A+B)+(1-v)(A+B)^*\right)^*\left(v(A+B)+(1-v)(A+B)^*\right)\right\| \\
&= \left\|\left(v(A+B)^*+(1-v)(A+B)\right)\left(v(A+B)+(1-v)(A+B)^*\right)\right\| \\
&= \left\|\left((M_v(A))^*+(M_v(B))^*\right)\left(M_v(A)+M_v(B)\right)\right\| \\
&= \left\|(M_v(A))^*M_v(A)+(M_v(B))^*M_v(B)\right\| \\
&\le \left\|(M_v(A))^*M_v(A)\right\|+\left\|(M_v(B))^*M_v(B)\right\| \\
&= \|A\|_v^{\ 2}+\|B\|_v^{\ 2}
\end{aligned} \tag{21}
$$

又$\|A+B\|_v^{\ 2}=\|A\|_v^{\ 2}+\|B\|_v^{\ 2}$,故

$$
\left\|(M_v(A))^*M_v(A)\right\|+\left\|(M_v(B))^*M_v(B)\right\|=\|A+B\|_v^{\ 2}=\left\|(M_v(A))^*M_v(A)+(M_v(B))^*M_v(B)\right\|
$$

由推论 2 知存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left\langle (M_v(A))^*M_v(A)x_n,(M_v(B))^*M_v(B)x_n\right\rangle &= \left\|(M_v(A))^*M_v(A)\right\|\left\|(M_v(B))^*M_v(B)\right\| \\
&= \|M_v(A)\|^2\|M_v(B)\|^2 \\
&= \|A\|_v^{\ 2}\|B\|_v^{\ 2}.
\end{aligned}
$$

(ii)$\Rightarrow$(i)　若存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$
\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v(A^*)M_v(A)x_n,M_v(B^*)M_v(B)x_n\right\rangle=\|A\|_v^{\ 2}\|B\|_v^{\ 2}
$$

则

$$
\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v(A^*)M_v(A)x_n,M_v(B^*)M_v(B)x_n\right\rangle=\|M_v(A)\|^2\|M_v(B)\|^2=\left\|M_v(A^*)M_v(A)\right\|\left\|M_v(B^*)M_v(B)\right\|
$$

由(21),推论 2 和$M_v(B^*)M_v(A)=0$有

$$
\left\|(M_v(A))^*M_v(A)\right\|+\left\|(M_v(B))^*M_v(B)\right\|=\left\|(M_v(A))^*M_v(A)+(M_v(B))^*M_v(B)\right\|=\|A+B\|_v^{\ 2}
$$

上式结合定理 3 有$\|A+B\|_v^{\ 2}=\|A\|_v^{\ 2}+\|B\|_v^{\ 2}$.

取定$v\in[0,1]$, $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 定义函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$,

$$
\theta\mapsto\left\|ve^{i\theta}T+(1-v)e^{-i\theta}T^*\right\|,
$$

由连续函数的复合易知 $f$ 是连续的, 且 $\operatorname{Ran} f = \operatorname{Ran} f|_{[0,2\pi]}$, 故由紧集上的连续函数可以取到最大值, 我们有以下直接的事实:

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} f(\theta) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} f(\theta) = \max_{\theta\in[0,2\pi]} f(\theta) \tag{22}$$

**定理 7**: 若 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), v \in [0,1]$,则下列条件等价:

(i) $\omega_v(A+B) = \omega_v(A) + \omega_v(B)$

(ii) 存在 $\theta \in [0,2\pi]$ 与 $\mathcal{H}$ 中的一列单位向量 $\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle M_v\left(e^{i\theta}A\right)x_n, M_v\left(e^{i\theta}B\right)x_n \right\rangle = \omega_v(A)\omega_v(B).$$

**证明**: (i) $\Rightarrow$ (ii) 因为 $\omega_v(A+B) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left\| ve^{i\theta}(A+B) + (1-v)e^{-i\theta}(A+B)^* \right\|$,故由(22)有 $\theta_0 \in [0,2\pi]$ 成立

$$\left\| ve^{i\theta_0}(A+B) + (1-v)e^{-i\theta_0}(A+B)^* \right\| = \omega_v(A+B).$$

由定理 1.1 有存在一列 $\mathcal{H}$ 中的一列单位向量 $\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left( ve^{i\theta_0}(A+B) + (1-v)e^{-i\theta_0}(A+B)^* \right) x_n \right\| = \omega_v(A+B) \tag{23}$$

又由加权数值域半径的定义,有

$$\begin{aligned}
\left\| \left( ve^{i\theta_0}(A+B) + (1-v)e^{-i\theta_0}(A+B)^* \right) x_n \right\| &= \left\| \left( ve^{i\theta_0}A + (1-v)e^{-i\theta_0}A^* \right) x_n + \left( ve^{i\theta_0}B + (1-v)e^{-i\theta_0}B^* \right) x_n \right\| \\
&\le \left\| \left( ve^{i\theta_0}A + (1-v)e^{-i\theta_0}A^* \right) x_n \right\| + \left\| \left( ve^{i\theta_0}B + (1-v)e^{-i\theta_0}B^* \right) x_n \right\| \\
&\le \left\| \left( ve^{i\theta_0}A + (1-v)e^{-i\theta_0}A^* \right) x_n \right\| + \left\| ve^{i\theta_0}B + (1-v)e^{-i\theta_0}B^* \right\| \\
&\le \left\| \left( ve^{i\theta_0}A + (1-v)e^{-i\theta_0}A^* \right) x_n \right\| + \omega_v(B) \\
&\le \omega_v(A) + \omega_v(B)
\end{aligned}$$

令上式两边 $n\to\infty$,由(23)有

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left( ve^{i\theta_0}A + (1-v)e^{-i\theta_0}A^* \right) x_n \right\| = \omega_v(A) \tag{24}$$

类似地,有

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left( ve^{i\theta_0}B + (1-v)e^{-i\theta_0}B^* \right) x_n \right\| = \omega_v(B) \tag{25}$$

另一方面,由加权数值域半径定义,范数和内积的展开整理有

$$\begin{aligned}\left\|\left(ve^{i\theta_0}(A+B)+(1-v)e^{-i\theta_0}(A+B)^*\right)x_n\right\|^2&=\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n\right\|^2+\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\|^2+2\mathcal{R}\left\langle M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\rangle\\&\le\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n\right\|^2+\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\|^2+2\left|\left\langle M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\rangle\right|\\&\le\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n\right\|^2+\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\|^2+2\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)\right\|\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)\right\|\\&\le\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n\right\|^2+\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\|^2+2\omega_v(A)\omega_v(B)\end{aligned}$$

令上式两边$n\to\infty$,由(23),(24),(25)有

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\rangle=\lim_{n\to\infty}\left|\left\langle M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\rangle\right|=\omega_v(A)\omega_v(B)$$

由引理 2 有

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(e^{i\theta_0}A\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta_0}B\right)x_n\right\rangle=\omega_v(A)\omega_v(B)$$

(ii)$\Rightarrow$(i) 若存在$\theta\in[0,2\pi]$与$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta}B\right)x_n\right\rangle=\omega_v(A)\omega_v(B) \tag{26}$$

又由$Cauchy$不等式和加权数值域半径定义有

$$\begin{aligned}\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta}B\right)x_n\right\rangle&\le\left\|M_v\left(e^{i\theta}A\right)x_n\right\|\left\|M_v\left(e^{i\theta}B\right)x_n\right\|\\&\le\left\|M_v\left(e^{i\theta}A\right)x_n\right\|\left\|M_v\left(e^{i\theta}B\right)\right\|\\&\le\left\|M_v\left(e^{i\theta}A\right)x_n\right\|\omega_v(B)\\&\le\left\|M_v\left(e^{i\theta}A\right)\right\|\omega_v(B)\\&\le\omega_v(A)\omega_v(B)\end{aligned}$$

令上式两边$n\to\infty$,由(26)有

$$\omega_v(A)=\left\|M_v\left(e^{i\theta}A\right)\right\|,$$

$$\omega_v(B)=\left\|M_v\left(e^{i\theta}B\right)\right\|.$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta}B\right)x_n\right\rangle=\left\|M_v\left(e^{i\theta}A\right)\right\|\left\|M_v\left(e^{i\theta}B\right)\right\|$$

由定理 4 有

$$\left\|M_v\left(e^{i\theta}(A+B)\right)\right\|=\left\|M_v\left(e^{i\theta}A\right)\right\|+\left\|M_v\left(e^{i\theta}B\right)\right\|=\omega_v(A)+\omega_v(B)$$

又由加权数值域半径定义和定理 2.2 有

$$\left\|M_v\left(e^{i\theta}\left(A+B\right)\right)\right\| \le \omega_v\left(A+B\right) \le \omega_v\left(A\right)+\omega_v\left(B\right)$$

故$\omega_v\left(A+B\right)=\omega_v\left(A\right)+\omega_v\left(B\right)$.

为了刻画更多的等式成立条件, 我们先转向一类凸函数的研究.

**定理 8**: 设$A$, $B\in\mathcal{B}\left(\mathcal{H}\right)$, $v\in\left[0,1\right]$, 定义函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, 满足

$$t\mapsto\left\|tA+\left(1-t\right)B\right\|_v$$

则$f$是$\mathbb{R}$上的凸函数.

**证明**: 设$\alpha\in\left(0,1\right)$, $\beta=1-\alpha$ $t_1$, $t_2\in\mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned}
&f\left(\alpha t_1+\beta t_2\right)\\
&=\left\|v\left(\left(\alpha t_1+\beta t_2\right)A+\left(1-\alpha t_1-\beta t_2\right)B\right)+(1-v)\left(\left(at_1+\beta t_2\right)A^*+\left(1-\alpha t_1-\beta t_2\right)B^*\right)\right\|\\
&=\left\|v\left(\alpha t_1A+\beta t_2A+B-at_1B-\beta t_2B\right)+\left(1-v\right)\left(at_1A^*+\beta t_2A^*+B^*-at_1B^*-\beta t_2B^*\right)\right\|\\
&=\left\|\alpha v\left(t_1A-t_1B\right)+\left(1-v\right)\left(t_1A^*-t_1B^*\right)+\beta v\left(t_2A-t_2B\right)+\left(1-v\right)\left(t_2A^*-t_2B^*\right)+vB+\left(1-v\right)B^*\right\|\\
&=\left\|\alpha v\left(t_1A-t_1B\right)+\left(1-v\right)\left(t_1A^*-t_1B^*\right)+\beta v\left(t_2A-t_2B\right)+\left(1-v\right)\left(t_2A^*-t_2B^*\right)+\left(\alpha+\beta\right)vB+\left(\alpha+\beta\right)\left(1-v\right)B^*\right\|\\
&=\left\|\alpha\left(v\left(t_1A+\left(1-t_1\right)B\right)+\left(1-v\right)\left(t_1A^*+\left(1-t_1\right)B^*\right)\right)+\beta\left(v\left(t_2A+\left(1-t_2\right)B\right)+\left(1-v\right)\left(t_2A^*+\left(1-t_2\right)B^*\right)\right)\right\|\\
&\le\alpha\left\|v\left(t_1A+\left(1-t_1\right)B\right)+\left(1-v\right)\left(t_1A^*+\left(1-t_1\right)B^*\right)\right\|+\beta\left\|v\left(t_2A+\left(1-t_2\right)B\right)+\left(1-v\right)\left(t_2A^*+\left(1-t_2\right)B^*\right)\right\|\\
&=af\left(t_1\right)+\beta f\left(t_2\right)
\end{aligned}$$

由定义 1.2, 即证.

**推论 4**: 设$A\in\mathcal{B}\left(\mathcal{H}\right)$, 定义函数$f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}_+$, 满足

$$v\mapsto\left\|vA+\left(1-v\right)A^*\right\|$$

则$f$是$\left[0,1\right]$上的连续凸函数, 在$v=\dfrac{1}{2}$时, $f$取到最小值, 在$v=0$, $1$时, $f$取到最大值, 且在对称轴$v=\dfrac{1}{2}$左侧单调递减, 右侧单调递增.

**证明**: 令定理 8 中的$B=A^*$, $v=1$, 就得到$f$是凸函数. 利用$f$的凸性和定理 1.3, 有

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right)&=f\left(\frac{v+1-v}{2}\right)\\
&\le \frac{1}{2}f(v)+\frac{1}{2}f(1-v)\\
&=\frac{1}{2}\left\|vA+(1-v)A^*\right\|+\frac{1}{2}\left\|(1-v)A+vA^*\right\|\\
&\le \left\|vA+(1-v)A^*\right\|=f(v)
\end{aligned}
$$

故 $v=\dfrac{1}{2}$ 时, $f$ 取到最小值. 又定理 1.3 易有 $f(0)=f(1)$, 结合凸性有

$$
\begin{aligned}
f(v)&=f\left(v\times 1+(1-v)\times 0\right)\\
&\le vf(1)+(1-v)f(0)\\
&=vf(1)+(1-v)f(1)\\
&=f(1)=f(0)
\end{aligned}
$$

故在 $v=0$ , $1$时, $f$ 取到最大值. $f$ 的连续性利用连续函数是复合是易知的. 设 $v\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, 则由定理 1.3 有

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}-v\right)&=\left\|\left(\frac{1}{2}-v\right)A+\left(1-\frac{1}{2}+v\right)A^*\right\|\\
&=\left\|\left(\frac{1}{2}-v\right)A+\left(\frac{1}{2}+v\right)A^*\right\|\\
&=\left\|\left(\frac{1}{2}-v\right)A^*+\left(\frac{1}{2}+v\right)A\right\|\\
&=f\left(\frac{1}{2}+v\right)
\end{aligned}
$$

故 $f$ 以 $v=\dfrac{1}{2}$ 为对称轴. 设 $v_1<v_2<\dfrac{1}{2}$, 则由引理 1.1 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(v_2)-f(v_1)}{v_2-v_1}\le\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(v_2)}{\frac{1}{2}-v_2}\le 0\\
&\Rightarrow f(v_2)\le f(v_1)
\end{aligned}
$$

故 $f$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 单调递减, 由对称性可知 $f$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 单调递增.

由推论 4, 我们能断言 $\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $[0,1]$ 上的函数 $f_A(v)=\omega_v(A)$ 是凸函数. 因为 $f_A(v)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|ve^{i\theta}A+(1-v)e^{-i\theta}A^*\right\|$, 又令推论 4 中的 $A$ 为 $e^{i\theta}A$ ,有 $\forall\alpha+\beta=1$ $v_1,v_2\in[0,1]$, 成立

$$f(\alpha v_1+\beta v_2)\le\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)$$

故

$$\left\|(\alpha v_1+\beta v_2)e^{i\theta}A+(1-\alpha v_1-\beta v_2)e^{-i\theta}A^*\right\|\le\alpha\left\|v_1e^{i\theta}A+(1-v_1)e^{-i\theta}A^*\right\|+\beta\left\|v_2e^{i\theta}A+(1-v_2)e^{-i\theta}A^*\right\|$$

对上式关于 $\theta\in\mathbb{R}$ 取上确界, 易有

$$f_A(\alpha v_1+\beta v_2)\le\alpha f_A(v_1)+\beta f_A(v_2)$$

即 $f_A(v)=\omega_v(A)$ 是凸函数. 我们想指出的是, 由算子诱导的凸函数的不一定是凸函数.

**例 2**: 设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}\omega_v(A)&=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|ve^{i\theta}A+(1-v)e^{-i\theta}A^*\right\|\\&=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}&ve^{i\theta}\\(1-v)e^{-i\theta}&\end{pmatrix}\right\|\\&=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}&(1-v)e^{i\theta}\\ve^{-i\theta}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&ve^{i\theta}\\(1-v)e^{-i\theta}&\end{pmatrix}\right\|^{\frac{1}{2}}\\&=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}(1-v)^2&0\\0&v^2\end{pmatrix}\right\|^{\frac{1}{2}}=\max\{v,1-v\}\end{aligned}$$

类似地, 有 $\omega_v(B)=\max\{2v,2-2v\}$ , 则

$$f(v)=\omega_v(A)-\omega_v(B)=\begin{cases}v-1 & v\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\-v & v\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

显然 $f(v)$ 是凹函数.

**推论 5**: 设$A$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $v\in[0,1]$, 则

$$\begin{aligned}
&\|A+B\|_v \\
&\le(1-\lambda)\|(1+\lambda)A+(1-\lambda)B\|_v+\lambda\|\lambda A+(2-\lambda)B\|_v \\
&\le 2\int_0^1\|tA+(1-t)B\|_v\,dt \\
&\le\|\lambda A+(1-\lambda)B\|_v+(1-\lambda)\|A\|_v+\lambda\|B\|_v \\
&\le\|A\|_v+\|B\|_v
\end{aligned}$$

**证明**: 由定理 8,有$f(t)=\|tA+(1-t)B\|_v$是凸函数, 则由定理 2.3 有

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{0+1}{2}\right)&\le(1-\lambda)f\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)+\lambda f\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\
&\le\int_0^1 f(t)\,dt \\
&\le\frac{1}{2}\left(f(\lambda)+(1-\lambda)f(1)+\lambda f(0)\right) \\
&\le\frac{f(0)+f(1)}{2}
\end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\right\|_v\le(1-\lambda)\left\|\frac{1+\lambda}{2}A+\frac{1-\lambda}{2}B\right\|_v+\lambda\left\|\frac{\lambda}{2}A+\frac{2-\lambda}{2}B\right\|_v \\
&\le\int_0^1\|tA+(1-t)B\|_v\,dt \\
&\le\frac{1}{2}\left(\|\lambda A+(1-\lambda)B\|_v+(1-\lambda)\|A\|_v+\lambda\|B\|_v\right) \\
&\le\frac{1}{2}\left(\|A\|_v+\|B\|_v\right)
\end{aligned}$$

即证.

通过下面直接的关系, 我们建立后面的结果.

$\forall A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 其加权数值域半径$\omega_v(A)$和加权算子范数$\|A\|_v$满足

$$\omega_v(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|e^{i\theta}A\right\|_v \tag{27}$$

**推论 6**: 若$A$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $v\in[0,1]$, 则

$$
\begin{aligned}
\omega_v(A+B) &\le \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left((1-\lambda)\left\|(1+\lambda)e^{i\theta}A+(1-\lambda)e^{i\theta}B\right\|_v+\lambda\left\|\lambda e^{i\theta}A+(2-\lambda)e^{i\theta}B\right\|_v\right)\\
&\le \sup_{\theta\in\mathbb{R}}2\int_0^1\left\|te^{i\theta}A+(1-t)e^{i\theta}B\right\|_v dt\\
&\le \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\left\|\lambda e^{i\theta}A+(1-\lambda)e^{i\theta}B\right\|_v+(1-\lambda)\left\|e^{i\theta}A\right\|_v+\lambda\left\|e^{i\theta}B\right\|_v\right)\\
&\le \omega_v(A)+\omega_v(B)
\end{aligned}
$$

**证明**: 令推论 5 中的 $A=e^{i\theta}A$，$B=e^{i\theta}B$，由(27)，关于 $\theta\in\mathbb{R}$ 取上确界即证.

**例 3**: 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$$
\omega_v(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|ve^{i\theta}A+(1-v)e^{-i\theta}A^*\right\|=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}0&(1-v)e^{-i\theta}&0\\ve^{i\theta}&0&(1-v)e^{-i\theta}\\0&ve^{i\theta}&0\end{pmatrix}\right\|
$$

$$
=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}0&ve^{-i\theta}&0\\(1-v)e^{i\theta}&0&ve^{-i\theta}\\0&(1-v)e^{i\theta}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&(1-v)e^{-i\theta}&0\\ve^{i\theta}&0&(1-v)e^{-i\theta}\\0&ve^{i\theta}&0\end{pmatrix}\right\|^{\frac{1}{2}}
$$

$$
=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}v^2&0&v(1-v)e^{-2i\theta}\\0&(1-v)^2+v^2&0\\v(1-v)e^{2i\theta}&0&(1-v)^2\end{pmatrix}\right\|^{\frac{1}{2}}
$$

由定理 1.7,有

$$
\left\|\begin{pmatrix}v^2&0&v(1-v)e^{-2i\theta}\\0&(1-v)^2+v^2&0\\v(1-v)e^{2i\theta}&0&(1-v)^2\end{pmatrix}\right\|
$$

$$
=\max\left\{\lambda:\begin{vmatrix}\lambda-v^2&0&-v(1-v)e^{-2i\theta}\\0&\lambda-\left((1-v)^2+v^2\right)&0\\-v(1-v)e^{2i\theta}&0&\lambda-(1-v)^2\end{vmatrix}=0\right\}
$$

$$
=\max\left\{\lambda:\lambda\left(\lambda-\left(1-2v+2v^2\right)\right)^2=0\right\}=1-2v+2v^2
$$

故

$$\omega_v(A)=\sqrt{1-2v+2v^2}\ .$$

类似地,有

$$\omega_v(B)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|ve^{i\theta}B+(1-v)e^{-i\theta}B^*\right\|=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}0 & ve^{i\theta} & ve^{i\theta}\\ (1-v)e^{-i\theta} & 0 & 0\\ (1-v)e^{-i\theta} & 0 & 0\end{pmatrix}\right\|$$

$$=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}0 & (1-v)e^{i\theta} & (1-v)e^{i\theta}\\ ve^{-i\theta} & 0 & 0\\ ve^{-i\theta} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & ve^{i\theta} & ve^{i\theta}\\ (1-v)e^{-i\theta} & 0 & 0\\ (1-v)e^{-i\theta} & 0 & 0\end{pmatrix}\right\|^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\begin{pmatrix}2(1-v)^2 & 0 & 0\\ 0 & v^2 & v^2\\ 0 & v^2 & v^2\end{pmatrix}\right\|^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\max\{v,1-v\}$$

故

$$\omega_v\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\le\omega_v\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+\omega_v\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\sqrt{1-2v+2v^2}+\sqrt{2}\max\{v,1-v\}$$

特别地,在$v=1$时,有

$$\omega\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\omega_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\le\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\frac{1}{2}=\sqrt{2}$$

故由定理 2.0 有多项式$p(z)=z^3+z+1$的零点$\lambda$的模

$$|\lambda|\le\sqrt{2}\ .$$

另一方面,*Carmichael* 和 *Mason* 在文[12]中有下面的结果:

若$p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$是$n$次多项式,则$p(z)$的零点$\lambda$的模

$$|\lambda|\le\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|^2+1}$$

从上面的结果有

$$|\lambda|\le\sqrt{3}$$

故从这个例子, 我们一定程度上加强了 *Carmichael* 和 *Mason* 的结果.事实上,通过直接的计算有 $p(z)=z^3+z+1$ 的零点是

$$z_1 \approx -0.682,\ z_2 = 0.341-1.162i,\ z_2 = 0.341+1.162i.$$

**推论 7**: 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $v\in[0,1]$, $\alpha=\max\{v,1-v\}$, 则

$$\frac{1}{2\alpha}\omega_v\left(A^2\right)\le\omega\left(A^2\right)\le\omega^2(A)\le\omega_v^2(A).$$

**证明**: 由推论 4 有 $\left\|e^{i\theta}A\right\|_{\frac{1}{2}}\le\left\|e^{i\theta}A\right\|_v$, 又(2), (27)有

$$\omega(A)=\omega_{\frac{1}{2}}(A)\le\omega_v(A),$$

结合定理 2.4 和定理 2.1 有 $\frac{1}{2\alpha}\omega_v\left(A^2\right)\le\omega\left(A^2\right)\le\omega^2(A)\le\omega_v^2(A)$.

**定理 9**: 若 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}), v\in[0,1]$,则下列条件等价:

(i) $\omega_v(AB)=\max\left\{\|A\|^2,\|B\|^2\right\}$

(ii) 存在 $\mathcal{H}$ 中的一列单位向量 $\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\langle ABx_n,(AB)^*x_n\right\rangle\right|=\max\left\{\|A\|^4,\|B\|^4\right\}.$$

**证明**: (i)$\Rightarrow$(ii) 由定义 9 有

$$\omega_v(AB)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|ve^{i\theta}AB+(1-v)e^{-i\theta}(AB)^*\right\|=\max\left\{\|A\|^2,\|B\|^2\right\}$$

结合(22)知 $\exists\theta_0$ 成立 $\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}AB\right)\right\|=\max\left\{\|A\|^2,\|B\|^2\right\}$.

进一步,

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\|A\|^2,\|B\|^2\right\}=\left\|M_v\left(e^{i\theta_0}AB\right)\right\|\\
&=\left\|ve^{i\theta_0}AB+(1-v)e^{-i\theta_0}(AB)^*\right\|\\
&\le v\|AB\|+(1-v)\left\|(AB)^*\right\|\\
&\le\|AB\|\le\|A\|\|B\|\\
&\le\max\left\{\|A\|^2,\|B\|^2\right\}
\end{aligned}$$

故

$$\left\|e^{i\theta}AB\right\|_v=\|A\|\|B\|=\left\|e^{i\theta}A\right\|\|B\|$$

且$\|A\|=\|B\|$,由定理 2 知存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle e^{i\theta}ABx_n,\left(e^{i\theta}AB\right)^*x_n\right\rangle=\left\|e^{i\theta}A\right\|^2\|B\|^2=\|A\|^2\|B\|^2=\max\left\{\|A\|^4,\|B\|^2\right\}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left\langle ABx_n,(AB)^*x_n\right\rangle\right|=\max\left\{\|A\|^4,\|B\|^4\right\}$.

(ii)$\Rightarrow$(i)　若存在$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\langle ABx_n,(AB)^*x_n\right\rangle\right|=\max\left\{\|A\|^4,\|B\|^4\right\}$$

则由定义 9,推论 7 和(27)有

$$\max\left\{\|A\|^4,\|B\|^4\right\}\le\omega\left((AB)^2\right)\le\omega^2(AB)\le\omega_v^{\,2}(AB)\le\|AB\|^2\le\max\left\{\|A\|^4,\|B\|^4\right\}$$

从而$\omega_v^{\,2}(AB)=\max\left\{\|A\|^4,\|B\|^4\right\}$,即$\omega_v(AB)=\max\left\{\|A\|^2,\|B\|^2\right\}$.

由推论 6,推论 7 有$\forall A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1],\alpha=\max\{v,1-v\}$,成立

$$\omega_v\left(A^2+B^2\right)\le\omega_v\left(A^2\right)+\omega_v\left(B^2\right)\le2\alpha\omega_v^{\,2}(A)+2\alpha\omega_v^{\,2}(B)\le4\alpha\max\left\{\omega_v^{\,2}(A),\omega_v^{\,2}(B)\right\}.$$

**定理 10**: 若$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),v\in[0,1],\alpha=\max\{v,1-v\}$,则下列条件等价:

(i)　$\omega_v\left(A^2+B^2\right)=4\alpha\max\left\{\omega_v^2(A),\omega_v^2(B)\right\}$

(ii)　存在$\theta\in[0,2\pi]$与$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A^2\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta}B^2\right)x_n\right\rangle=4\alpha^2\max\left\{\omega_v^{\,4}(A),\omega_v^{\,4}(B)\right\}$$

**证明**: (i)$\Rightarrow$(ii)　从定理前面的事实有

$$\omega_v\left(A^2+B^2\right)=\omega_v\left(A^2\right)+\omega_v\left(B^2\right)=2\alpha\omega_v^{\,2}(A)+2\alpha\omega_v^{\,2}(B)=4\alpha\max\left\{\omega_v^2(A),\omega_v^2(B)\right\}$$

由推论 7 有

$$\omega_v\left(A^2\right)=2\alpha\omega_v^{\,2}(A)=2\alpha\omega_v^{\,2}(B)=\omega_v\left(B^2\right)$$

由定理 7 存在$\theta\in[0,2\pi]$与$\mathcal{H}$中的一列单位向量$\{x_n\}$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A^2\right)x_n,M_v\left(e^{i\theta}B^2\right)x_n\right\rangle=\omega_v\left(A^2\right)\omega_v\left(B^2\right)=4\alpha^2\max\left\{\omega_v^{\,4}(A),\omega_v^{\,4}(B)\right\}.$$

(ii)$\Rightarrow$(i) 由引理 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A^2\right)x_n, M_v\left(e^{i\theta}B^2\right)x_n\right\rangle = 4\alpha^2\max\left\{\omega_v^{\ 4}\left(A\right),\omega_v^{\ 4}\left(B\right)\right\} \tag{28}$$

又$Cauchy$不等式,推论 7 有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A^2\right)x_n, M_v\left(e^{i\theta}B^2\right)x_n\right\rangle &\le \left|\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A^2\right)x_n, M_v\left(e^{i\theta}B^2\right)x_n\right\rangle\right| \\ &\le \left\|M_v\left(e^{i\theta}A^2\right)\right\|\left\|M_v\left(e^{i\theta}B^2\right)\right\| \\ &\le \omega_v\left(A^2\right)\omega_v\left(B^2\right) \\ &\le 2\alpha\omega_v^2\left(A\right)2\alpha\omega_v^2\left(B\right) \\ &\le 4\alpha^2\,\frac{\omega_v^4\left(A\right)+\omega_v^4\left(B\right)}{2} \\ &\le 4\alpha^2\max\left\{\omega_v^4\left(A\right),\omega_v^4\left(B\right)\right\}\end{aligned}$$

令上式两边$n\to\infty$,由(28)有

$$\omega_v\left(A^2\right)\omega_v\left(B^2\right) = 4\alpha^2\max\left\{\omega_v^4\left(A\right),\omega_v^4\left(B\right)\right\}$$

又结合推论 7 有

$$\omega_v\left(A^2\right) = 2\alpha\omega_v^2\left(A\right) = \omega_v\left(B^2\right) = 2\alpha\omega_v^2\left(B\right) \tag{29}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle M_v\left(e^{i\theta}A^2\right)x_n, M_v\left(e^{i\theta}B^2\right)x_n\right\rangle = \omega_v\left(A^2\right)\omega_v\left(B^2\right)$$

由定理 7 有

$$\omega_v\left(A^2+B^2\right) = \omega_v\left(A^2\right)+\omega_v\left(B^2\right)$$

故由(29)有

$$\omega_v\left(A^2+B^2\right) = 4\alpha\max\left\{\omega_v^2\left(A\right),\omega_v^2\left(B\right)\right\}.$$

# 参考文献

[1] Conde C, Sababheh M, Moradi H R. Some weighted numerical radius inequalities[J]. arxiv preprint arxiv:2204.07620, 2022.

[2] Sheikhhosseini A, Khosravi M, Sababheh M. The weighted numerical radius[J]. Annals of Functional Analysis, 2022, 13(1): 3.

[3] 詹兴致 《矩阵论》 高等教育出版社

[4] 许全华, 马涛, 尹智 《泛函分析讲义》 高等教育出版社

[5] 郭坤宇 《算子理论基础》 复旦大学出版社

[6] Bhunia P, Dragomir S S, Moslehian M S, et al. Lectures on numerical radius inequalities[M]. Cham: Springer, 2022.

[7] Yamazaki T. On upper and lower bounds of the numerical radius and an equality condition[J]. Studia mathematica, 2007, 1(178): 83-89.

[8] Conway J B. A course in functional analysis[M]. Springer, 2019.

[9] Sahoo S, Moradi H, Sababheh M. A mixed Cauchy-Schwarz inequality with applications[J]. 2023.

[10] 陈纪修, 於崇华, 金路 《数学分析》 高等教育出版社

[11] Chandra Rout N, Sahoo S, Mishra D. Some A-numerical radius inequalities for semi-Hilbertian space operators[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2021, 69(5): 980-996.

[12] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. Cambridge university press, 2012.

# 致谢

1. 论文的选题来源、研究背景:

本文主要受文[1],[2]的影响,两篇文章在最近以不同的方式定义了算子的加权数值域半径,我们感兴趣这两种定义的区别和统一,以及和经典数值域半径的联系.针对文[2]中对数值域半径的定义,即对 *Hilbert* 空间 $\mathcal{H}$ 上的任意有界线性算子 $A$, $v\in[0,1]$,定义

$$\omega_v(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|ve^{i\theta}A+(1-v)e^{-i\theta}A^*\right\|$$

是算子 $A$ 的加权数值域半径.我们受[1]中加权算子范数定义的启发,基于[2],给出新的加权算子范数定义,具体地,称

$$M_v(A)=vA+(1-v)A^*$$

是算子 $A$ 的加权平均变换,称

$$\|A\|_v\triangleq\|M_v(A)\|$$

是算子 $A$ 的加权算子范数.在 $v=\frac{1}{2}$ 时, $\omega_v(A)=\omega(A)$,在 $v=1$ 时, $\|A\|_v=\|A\|$,故我们的结果事实上对经典的数值域半径和范数是成立的.数值域半径的一个主要应用就是处理多项式零点的估计,这一点在例 3 中可以看到,故我们利用加权数值域半径的凸性结合 *Hadamard* 不等式等发展数值域半径的估计,更多的是加权数值域半径不等式.自然的,不等式等号成立条件也是值得关心的,我们建立了一些边界性等式如

$$\omega\left(M_v(B^*)M_v(A)\right)=\max\left\{\|A\|_v^{\,2},\|B\|_v^{\,2}\right\}$$

$$\omega_v(AB)=\max\left\{\|A\|^2,\|B\|^2\right\}$$

$$\omega_v\left(A^2+B^2\right)=4\alpha\max\left\{\omega_v^2(A),\omega_v^2(B)\right\}$$

$$\|A+B\|_v=2\max\left\{\|A\|_v,\|B\|_v\right\}$$

的充要条件,加权算子范数的勾股定理,即

$$\|A+B\|_v^{\,2}=\|A\|_v^{\,2}+\|B\|_v^{\,2}$$

的充要条件也在定理 6 中给出, 同时也建立了如下等式成立的充要条件,

$$\|A\|_v = \|A\|$$

$$\|A+B\|_v = \|A\|_v + \|B\|_v$$

$$\|A+B\|_v = 2\max\left\{\|A\|_v, \|B\|_v\right\}.$$

特别地,我们通过例 3 来说明推论 6 是加强了 *Carmichael* 和 *Mason* 的结果.

2. 每一个队员在论文撰写中承担的工作以及贡献:

汪成科自己完成了论文撰写, 进行计算证明等工作.

3. 指导老师与学生的关系, 在论文写作过程中所起的作用:

指导老师在论文选题, 方向指引, 论文架构上进行指导, 对论文总体框架与内容做引导工作.

及指导是否有偿: 无偿

4. 他人协助完成的研究成果: 无.

5. 主要遇到的困难:

在熟悉算子理论的时候, 要具备一定的线性代数知识, 熟练地运用范数和内积的等式变化, 这些花了一定的时间去学习准备. 面对加权数值域半径的计算, 我们会利用一些计算软件协助计算, 保证成果的正确性.

作者感谢丘成桐中学数学奖为其提供的充分展示自我的平台与机会.